19. *(Задача предложена Д.Сверак sverak_fm)* В ячейках таблицы 5 на 9 расставлены натуральные числа, среди которых ровно 33 нечетных. Александра рассматривает пары соседних ячеек, имеющих общую сторону. Если произведение чисел в паре четно, наша героиня считает такую пару зачетной.

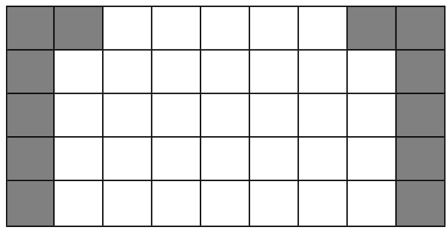
А) Может ли в таблице быть ровно 22 зачетные пары?

Б) Может ли в таблице быть ровно 49 зачетных пар?

В) Какое наибольшее число зачетных пар может быть в таблице?

Решение.

а) Всего четных чисел 45 – 33 = 12.
Ответ: да, например (в черных клетках – четные числа):



б) Каждое четное число может дать не более четырех зачетных пар, то есть всего не более 48.
Ответ: нет.

в) Четное число может дать 4 зачетные пары, только находясь в прямоугольнике 3x7, отстоящем от каждой из внешних границ на 1 клетку. При этом 2 клетки с четными числами не могут иметь общую сторону (в этом случае зачетные пары будут повторяться). Раскрасим этот прямоугольник в шахматном порядке и будем заполнять четными числами слева направо по вертикалям: сначала 1-ю вертикаль, потом 2-ю и т. д. Чтобы клетки не имели общих сторон, нужно ставить их на клетки одного цвета. Всего белых клеток 10, а черных – 11. Значит, по 4 зачетные пары могут дать не более 11 четных чисел (если их расставить на черные клетки). Еще одно четное число может дать 3 зачетные пары, например, как на рисунке. Всего получается не более 47 зачетных пар.
Ответ: 47.