19. В ячейках таблицы 5×9 расставлены натуральные числа, среди которых ровно 33 нечетных. Александра рассматривает пары соседних ячеек, имеющих общую сторону. Если произведение чисел в паре четно, наша героиня считает такую пару *зачетной*.

а) Может ли в таблице быть ровно 22 зачетные пары?

б) Может ли в таблице быть ровно 49 зачетных пар?

в) Какое наибольшее число зачетных пар может быть в таблице?

Решение.

Так как всего 45 чисел, 33 из которых нечетные, остальные 12 являются четными. Введем следующие обозначения: 1 — число является четным, 0 — число является нечетным.

а) Да, например, если расположить числа следующим образом.

1	**1**	**1**	0	0	0	0	0	0
1	**1**	0	0	0	0	0	0	0
1	**1**	0	0	0	0	0	0	0
1	**1**	0	0	0	0	0	0	0
1	**1**	**1**	0	0	0	0	0	0

б) Зачетная пара образуется лишь в случае, если хотя бы одно из чисел является четным. Так как каждое четное число входит не более чем в четыре зачетные пары, а всего четных чисел 12, то наибольшее возможное количество зачетных пар не более 48.

в) Предположим, что в таблице найдется 48 зачетных пар. Тогда каждое четное число даст ровно четыре такие пары, и среди них не будет общих. В таком случае, каждое из четных чисел располагается в ячейках таблицы 3×7, содержащейся внутри исходной. По принципу Дирихле из 12 ячеек с четными числами хотя бы четыре могут располагаться в одной строке, причем ровно четыре числа в одной строке будет, если они расположены через одну ячейку друг от друга. Так как для всех трех строк одновременно это не может выполняться, то в какой-то из строк будет не более трех четных чисел, т. е. всего будет не более 11 чисел. Получили противоречие, поэтому 48 зачетных пар не может быть в таблице.

Покажем, что 47 зачетных пар может быть. Для этого числа можно расположить, например, следующим образом.

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	**1**	0	**1**	0	**1**	0	**1**	0
0	0	**1**	0	**1**	0	**1**	0	**1**
0	**1**	0	**1**	0	**1**	0	**1**	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

Ответ: а) да; б) нет; в) 47.