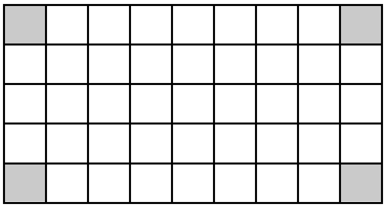
В ячейках таблицы 5 на 9 расставлены натуральные числа, среди которых ровно 33 нечётных. Александра рассматривает пары соседних ячеек, имеющих общую сторону. Если произведение чисел в паре чётно, наша героиня считает такую пару зачётной.
а) Может ли в таблице быть ровно 22 зачётные пары?
б) Может ли в таблице быть ровно 49 зачётных пар?
в) Какое наибольшее число зачётных пар может быть в таблице?

(задача предложена Д.Сверак sverak_fm)

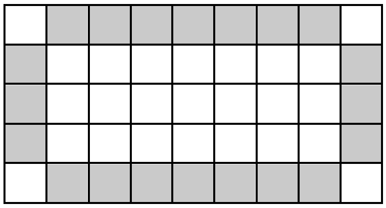
Решение

Так как произведение двух чисел чётно, если хотя бы один сомножитель чётный, то задача сводится к расстановке в таблице оставшихся 12 чётных чисел. Для краткости назовём эти клетки чётными. Разобьём таблицу на три зоны *A*, *B* и *C* (выделено серым):

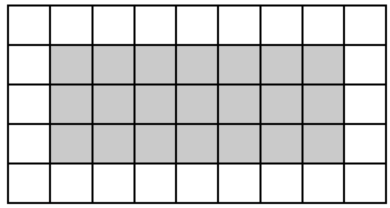
A



B

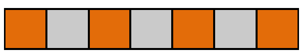


C

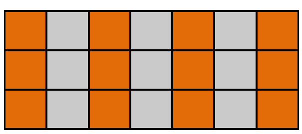


Чётная клетка из зоны *A* порождает две зачётные пары, из зоны *B* – три пары, а из зоны *C* – четыре. Значит, зачётных пар не может быть больше 48 ($= 12 \times 4$). Чтобы получить эти 48 пар, все чётные клетки должны находиться в зоне *C,* и, кроме того, никакие две из них не должны иметь общей стороны, т.к. в этом случае одна и та же зачётная пара учитывалась бы дважды.

Допустим, что существует такое расположение 12-ти чётных клеток. В одной строке зоны *C* можно поместить максимум 4 чётные клетки (выделено оранжевым), причём единственным способом:

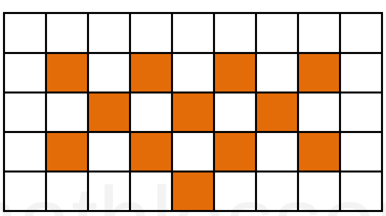


Но если все три строки зоны *C* будут такими же, то мы получим столбцы из трёх чётных клеток, что недопустимо:

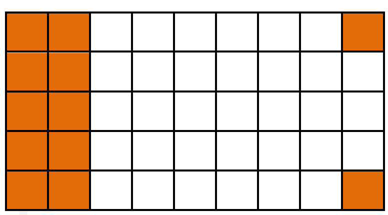


Следовательно, не может быть 48 зачётных пар. Варианты для 47 и 22 пар существуют:

47



22



Ответ: **а)** Да; **б)** Нет; **в)** 47.