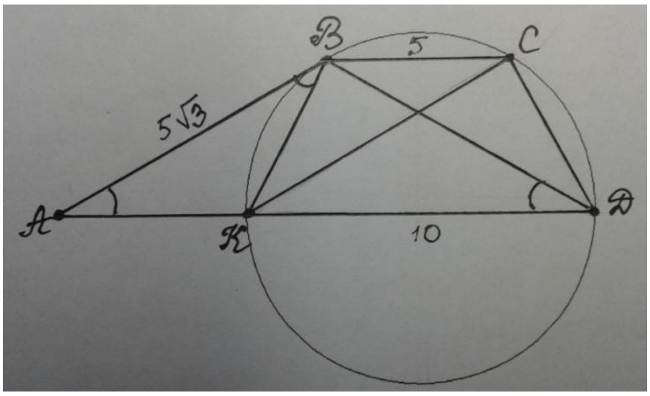
**16_Ларин А.А._Тренировочный вариант № 306 _ЕГЭ_2020**

Окружность проходит через вершины $C$ и $D$ трапеции $ABCD$, касается боковой стороны $AB$ в точке $B$ и пересекает большее основание $AD$ в точке $K$. Известно, что $AB = 5\sqrt{3},\ BC = 5,\ KD = 10.$

а) Докажите, что $BD = \sqrt{AD \cdot BC}.$

б) Найти радиус окружности.

Р е ш е н и е:




а) По свойству касательной и секущей, проведенных к окружности из точки $A$: $AB^2 = AK \cdot AD.$ Пусть $AK = x.$ Тогда: $75 = x \cdot (10 + x),$ т.е. $x^2 + 10x - 75 = 0$. Положительный корень этого уравнения 5. Т.е. $AK = 5.$ $AD = 15.$

Четырехугольник $ABCK$ – параллелограмм, поскольку $AK \parallel BC$ и $AK = BC = 5.$ Значит, $KC = AB = 5\sqrt{3}.$

$KBCD$ – вписанная трапеция, следовательно, она равнобедренная, $BD = KC = 5\sqrt{3},$ $\Delta ABD$ – равнобедренный. Из сказанного: $\angle BAK = \angle BDA.$ $\angle BDA = 0,5 \cup KB,$ $\angle ABK = 0,5 \cup KB,$ а это значит, что $\angle BDA = \angle ABK,$ $\angle BAK = \angle ABK$, $BK = AK = 5.$

По доказанному выше: $BD = 5\sqrt{3},$ $AD = 15.$ По условию: $BC = 5.$ $5\sqrt{3} = \sqrt{15 \cdot 5} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 5\sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 5 \cdot 5} \Leftrightarrow$ $5\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ (равенство верно). Следовательно, $BD = \sqrt{AD \cdot BC}.$

б) В $\Delta ABK$ по теореме косинусов:

$$\cos\angle A = \frac{AB^2 + AK^2 - KB^2}{2AB \cdot AK} = \frac{75 + 25 - 25}{2 \cdot 5\sqrt{3} \cdot 5} = \frac{75}{2 \cdot 25\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$ $\angle A = 30^\circ.$ Тогда и $\angle ABK = \angle BDA = 30^\circ.$ Поскольку $BC \parallel AK$, $AB$ – секущая, $\angle ABC = 180^\circ - \angle BAK = 150^\circ.$

В $\Delta ABD$ $\angle DBK = 180^\circ - \left(\angle BAD + \angle ABK + \angle BDA\right) = 180^\circ - 3 \cdot 30^\circ = 90^\circ.$

Но угол $DBK$ – вписанный. Коли это так, то $KD$ – диаметр окружности, радиус которой будет равен 5. $(10 : 2 = 5).$

О т в е т: б) 5.