15. Решите неравенство: $-\log_{\frac{x}{6}}\left(\dfrac{\lg\sqrt{6-x}}{\lg x}\right) > \lg\dfrac{|x|}{x}$

Решение.

Так как $x>0$, то $|x|=x$, $\lg\dfrac{x}{x}=\lg 1=0$; неравенство примет вид:

$-\log_{\frac{x}{6}}\left(\dfrac{\lg\sqrt{6-x}}{\lg x}\right)>0 \;\Leftrightarrow\; \log_{\frac{x}{6}}\log_x\sqrt{6-x}<0.$ Найдём некоторые ограничения на x:

$$\begin{cases} x/6>0,\\ x/6\neq 1,\\ x>0,\\ x\neq 1,\\ \sqrt{6-x}>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0,\\ x\neq 1,\\ x\neq 6,\\ 6-x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0,\\ x\neq 1,\\ x\neq 6,\\ x<6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<6,\\ x\neq 1. \end{cases}$$

На множестве $M=(0;1)\cup(1;6)$ неравенство равносильно:

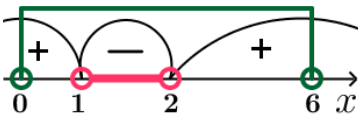
$\log_{\frac{x}{6}}\log_x\sqrt{6-x}<\log_{\frac{x}{6}}1 \;\Leftrightarrow\; \log_x\sqrt{6-x}>1 \;\Leftrightarrow\; \log_x\sqrt{6-x}-\log_x x>0 \;\Leftrightarrow$

$\left(0<x<6 \;\Leftrightarrow\; 0<\dfrac{x}{6}<1,\; y=\log_a t\right.$ – убывающая функция при $\left.0<a<1\right)$

применим метод рационализации (на множестве M):

$\Leftrightarrow\; (x-1)\left(\sqrt{6-x}-x\right)>0 \;\Leftrightarrow\; (x-1)(6-x-x^2)>0 \;\Leftrightarrow\; (x-1)(x^2+x-6)<0 \;\Leftrightarrow$

$\left(x^2+x-6=x^2+3x-2x-6=x(x+3)-2(x+3)=(x+3)(x-2)\right)$



$\Leftrightarrow (x-1)(x+3)(x-2)<0 \;\Leftrightarrow\; (x-1)(x-2)<0 \;\Leftrightarrow\; 1<x<2.$

$(x>0 \;\Leftrightarrow\; x+3>3)$

Ответ: $(1;2)$.