15_Ларин А.А._Тренировочный вариант № 305 _ЕГЭ_2020

Решите неравенство: $-\log_{\frac{x}{6}}\left(\dfrac{\lg\sqrt{6-x}}{\lg x}\right) > \lg\dfrac{|x|}{x}$.

Р е ш е н и е:

Некоторые ограничения на x: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 6 \\ x\neq 1 \\ 6-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 6 \\ x\neq 1 \\ x<6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<6 \\ x\neq 1 \end{cases}$. Кроме того, на множестве $(0;1)\cup(1;6)$ должно выполняться условие: $\dfrac{\lg\sqrt{x-6}}{\lg x}>0 \Leftrightarrow \log_x\sqrt{6-x}>0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \log_x\sqrt{6-x}>\log_x 1 \Leftrightarrow (x-1)(\sqrt{6-x}-1)>0 \Leftrightarrow (x-1)(6-x-1)>0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-1)(x-5)<0 \Leftrightarrow 1<x<5$. Итак, ограничения на x сузились.

Далее исходное неравенство будем рассматривать исключительно на множестве $M=(1;5)$. На M:

$$-\log_{\frac{x}{6}}\left(\frac{\lg\sqrt{6-x}}{\lg x}\right)>\lg\frac{|x|}{x} \Leftrightarrow \log_{\frac{x}{6}}\left(\log_x\sqrt{6-x}\right)<0 \Leftrightarrow \log_{\frac{x}{6}}\left(\log_x\sqrt{6-x}\right)<\log_{\frac{x}{6}}1. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{6}-1\right)\cdot\left(\log_x\sqrt{6-x}-1\right)<0 \Leftrightarrow (x-6)\cdot\left(\log_x\sqrt{6-x}-\log_x x\right)<0$$

На M $x-6<0$. Следовательно, $\log_x\sqrt{6-x}-\log_x x>0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot(\sqrt{6-x}-x)>0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 6-x-x^2>0 \Leftrightarrow x^2+x-6<0 \Leftrightarrow (x-2)(x+3)<0 \Leftrightarrow x-2<0 \Leftrightarrow x<2$.
Поскольку $1<x<5$, окончательно: $1<x<2$.

О т в е т: $(1;2)$.